

Lösungshinweise: 7. Blatt LA

Aufgabe 1: (Diagonalisierbarkeit I)

Die Eigenwerte sind $\lambda_1 = 3$ und $\lambda_2 = -1$. Die zugehörigen Eigenräume sind

$$\text{Eig}_{\lambda_1}(\phi) = \text{Lin}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}, \quad \text{Eig}_{\lambda_2}(\phi) = \text{Lin}\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

Weil die Summe der Dimensionen der Eigenräume gleich der Dimension von $V = \mathbb{R}^2$ ist, bilden $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Basis aus Eigenvektoren und in dieser ist die Darstellungsmatrix von ϕ

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Die gesuchte Basiswechselmatrix ist

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Probe: Mit

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 \\ -1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$C^{-1}AC = B$ nachrechnen.

Aufgabe 2: (Diagonalisierbarkeit II)

Die Eigenwerte sind $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 2$ und $\lambda_3 = 1$. Die zugehörigen Eigenräume sind

$$\text{Eig}_{\lambda_1}(\phi) = \text{Lin}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}, \quad \text{Eig}_{\lambda_2}(\phi) = \text{Lin}\left\{\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}, \quad \text{Eig}_{\lambda_3}(\phi) = \text{Lin}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

Wieder ist A diagonalisierbar, weil die Summe der Dimensionen der Eigenräume gleich der Dimension von $V = \mathbb{R}^3$ ist. Die drei Erzeuger der Eigenräume bilden eine Basis aus Eigenvektoren, bzgl der die Darstellungsmatrix diagonal ist:

$$B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Basiswechselmatrix ist

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit Inverser } C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 5 & 5 & -2 \\ 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Probe: Wieder $C^{-1}AC = B$ nachrechnen.

Aufgabe 3: (Diagonalisierbarkeit III)

Die Eigenwerte sind $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = -1$, wobei der zweite die Vielfachheit 2 hat. Die zugehörigen Eigenräume sind

$$\text{Eig}_{\lambda_1}(\phi) = \text{Lin}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}, \quad \text{Eig}_{\lambda_2}(\phi) = \text{Lin}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

Die Summe der Dimensionen der Eigenräume ist echt kleiner als die Dimension von $V = \mathbb{R}^3$, also gibt es keine Basis aus Eigenvektoren, mit anderen Worten, ϕ ist nicht diagonalisierbar. Ihr werdet im zweiten Semester lernen, dass man eine Basis finden kann, in der ϕ die schönstmögliche Form

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

annimmt, die man Jordansche Normalform von ϕ nennt.

Aufgabe 4: (Eigenwert unabhängig von der Basis)

- (a) Die Idee ist die folgende: Wenn λ ein Eigenwert von A mit Eigenvektor v ist, und man nun einen Basiswechsel (von A zu $S^{-1}AS$) durchführt, dann muß man auch den Eigenvektor in die neue Basis transformieren (also von v zu $S^{-1}v$ übergehen). In der Tat gilt:

$$Av = \lambda v \iff S^{-1}AS(S^{-1}v) = \lambda(S^{-1}v)$$

Also ist λ Eigenwert von $S^{-1}AS$ mit Eigenvektor $v' := S^{-1}v$.

- (b) Sei $A = M_B^B(\phi)$ die Darstellungsmatrix einer linearen Abbildung $\phi : V \rightarrow V$ bezüglich einer Basis B . Führt man einen Basiswechsel von B zu B' durch, so gilt mit $S := M_B^{B'}(\text{id}_V)$

$$M_{B'}^{B'}(\phi) = S^{-1}AS.$$

Nach (a) sind die Eigenwerte einer Matrix unabhängig von der gewählten Basis.

Aufgabe 5: (Eigenwerte eines idempotenten Endomorphismus)

Sei $\phi : V \rightarrow V$ ein idempotenter Endomorphismus. Angenommen λ ist ein Eigenwert von ϕ mit zugehörigem Eigenvektor v . Dann folgt aus $\phi(v) = \lambda v$ und $\phi^2 = \phi$:

$$\phi(v) = \phi^2(v) = \phi(\lambda v) = \lambda\phi(v)$$

Ist nun $\phi(v) \neq 0$, so folgt $\lambda = 1$. Ist $\phi(v) = 0$, so ist v ein Eigenvektor zum Eigenwert 0.