Universität Hamburg
Department Mathematik
Diana Kaminski
Heiko Remling
Fabian Schulte-Hengesbach

Brückenkurs Analysis I und Lineare Algebra I
22.02-02.03.2007

7. Übungsblatt Lineare Algebra

Aufgabe 1: (Diagonalisierbarkeit I)
Eine lineare Abbildung $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei in der Standardbasis gegeben durch die Darstellungsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechne die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix. Gibt es eine Basis von $\mathbb{R}^2$, die nur aus Eigenvektoren von ϕ besteht? Falls ja, gib die Darstellungsmatrix bzgl. dieser Basis an und die Basiswechselmatrix von dieser Basis in die Standardbasis an.

Aufgabe 2: (Diagonalisierbarkeit II)
Eine lineare Abbildung $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei in der Standardbasis gegeben durch die Darstellungsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 0 & 3 & 2 \\ -2 & -7 & -4 \end{pmatrix}.$$

Berechne die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix. Gibt es eine Basis von $\mathbb{R}^3$, die nur aus Eigenvektoren von ϕ besteht? Falls ja, gib die Darstellungsmatrix bzgl. dieser Basis und die Basiswechselmatrix von dieser Basis in die Standardbasis an.

Aufgabe 3: (Diagonalisierbarkeit III)
Eine lineare Abbildung $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei in der Standardbasis gegeben durch die Darstellungsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & -3 \\ -1 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Berechne die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix. Gibt es eine Basis von $\mathbb{R}^3$, die nur aus Eigenvektoren von ϕ besteht? Falls ja, gib die Darstellungsmatrix bzgl. dieser Basis und die Basiswechselmatrix von dieser Basis in die Standardbasis an.

Aufgabe 4: (Eigenwert unabhängig von der Basis)

(a) Seien A, $S \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$, und sei S invertierbar. Zeige dann gilt:

$$\lambda \text{ ist Eigenwert von } A \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda \text{ ist Eigenwert von } S^{-1}AS$$

(b) Begründe damit, warum die Definition von Eigenwert einer Matrix unabhängig von der Wahl einer Basis ist.

Aufgabe 5: (Eigenwerte eines idempotenten Endomorphismus)
Sei $\phi : V \to V$ ein idempotenter Endomorphismus. (Eine Abbildung $\phi : V \to V$ heißt *idempotent*, wenn $\phi^2 = \phi$.) Zeige, daß 0 und 1 die einzigen möglichen Eigenwerte von ϕ sind.