

Institut für Mathematik  
Prof. Dr. Lutz G. Lucht  
Prof. Dr. Jürgen W. Sander

# Oberseminar Zahlentheorie

## WS 2005/06

Behandelt werden aktuelle Probleme der kombinatorischen und analytischen Zahlentheorie. Zur Zielgruppe gehören Doktoranden, Diplomanden sowie Studierende mit Interesse an der Zahlentheorie. Nach rechtzeitiger Absprache mit den Veranstaltern können studentische Teilnehmer im Hauptstudium einen Hauptseminarschein erwerben.

Änderungen des Vortragsprogramms werden am Schwarzen Brett der Arbeitsgruppe Zahlentheorie (1. Etage) bekannt gemacht.

---

### Vorläufiges Programm

Di, 08.11.2005  
15<sup>h</sup> c.t. (SA)

**Prof. Dr. Lutz G. Lucht :**

#### ***Zur Lösbarkeit polynomialer Faltungsgleichungen***

In der  $\mathbb{C}$ -Algebra  $\mathcal{F}$  der arithmetischen Funktionen  $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ , versehen mit den üblichen punktweisen linearen Operationen und der Dirichletschen Faltung  $*$ , sei  $g^{*k}$  die Faltung  $g * \cdots * g$  mit  $k$  Faktoren  $g \in \mathcal{F}$ . Wir geben notwendige und hinreichende Bedingungen für die Lösbarkeit von Faltungsgleichungen der Gestalt  $a_d * g^{*d} + a_{d-1} * g^{*(d-1)} + \cdots + a_1 * g + a_0 = 0$  mit festen Koeffizientenfunktionen  $a_d, a_{d-1}, \dots, a_1, a_0 \in \mathcal{F}$ . In einigen Fällen haben die Lösungen spezielle Eigenschaften und lassen sich explizit beschreiben.

Di 22.11.2005  
15<sup>h</sup> c.t. (SA)

**Prof. Dr. Jürgen W. Sander :**

#### ***Ein Problem zwischen Linearer Algebra, Graphentheorie und Zahlentheorie***

Ein Standardhilfsmittel zur Darstellung endlicher Graphen ist die zugehörige Adjazenzmatrix. Dadurch lassen sich Methoden der Linearen Algebra für die Graphentheorie nutzbar machen und umgekehrt. Wir untersuchen den Kern spezieller Graphen, nämlich sog. Kreispotenzen. Bei der Bestimmung der Dimension dieses Kerns treten zahlentheoretische Bedingungen auf.

Di, 06.12.2005  
15<sup>h</sup> c.t. (SA)

**Prof. Dr. Štefan Porubský (Prag):**  
**Überdeckungssysteme und ihre Anwendungen**

Der Begriff des Überdeckungssystems wurde 1970 von P. Erdős eingeführt als ein System  $\mathcal{S}$  von Restklassen  $a_i \pmod{b_i}$  mit  $1 \leq i \leq w$  derart, dass jede ganze Zahl  $n$  wenigstens einer Restklasse von  $\mathcal{S}$  angehört. Wird mit Gewichtsfunktionen  $\mu(i)$  für  $i = 1, \dots, w$  durch

$$m(n) = \sum_{i=1}^w \mu(i) [n \in a_i \pmod{b_i}]$$

eine *überdeckende Funktion* des Systems  $\mathcal{S}$  erklärt, so heißt  $\mathcal{S}$  allgemeiner eine  $(\mu, m)$ -Überdeckung. Überdeckungssysteme sind dann die  $(\mu, m)$ -Überdeckungen mit  $\mu_i = 1$  für  $i = 1, \dots, w$  und  $m(n) \geq 1$  für jede ganze Zahl  $n$ .

Der Vortrag behandelt Methoden, Resultate, drei berühmte, bislang unbewiesene Vermutungen von Schinzel, von Erdős-Selfridge und von Erdős sowie Charakterisierungen exakter Überdeckungen (d.h.  $m(n) = 1$ ) und Zusammenhänge mit replikativen Funktionen.

Di, 24.01.2006  
15<sup>h</sup> c.t. (SA)

**Prof. Dr. Lutz G. Lucht:**  
**Zur Lösungsanzahl arithmetischer Gleichungen**

Für eine umfangreiche Klasse  $\mathcal{K}$  multiplikativer Funktionen  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  genügt die Anzahl  $S_{\kappa, \lambda}(f, x)$  der Lösungen  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \leq x$  der arithmetischen Gleichung  $\lambda f(n) = \kappa n$  der Ungleichung

$$S_{\kappa, \lambda}(f, x) \leq \exp(c \pi(\log x)) \quad (x \geq 1)$$

mit einer positiven Konstanten  $c = c(f)$  gleichmäßig für  $\lambda, \kappa \in \mathbb{N}$ . Dabei ist  $\pi(y)$  die Anzahl der Primzahlen  $p \leq y$ . Im Spezialfall der Teilersummenfunktion  $f = \sigma$  geht dies auf Wirsing (1959) zurück. Bis heute ist keine bessere obere Schranke für die Anzahl der vollkommenen Zahlen  $n \leq x$  (das sind die Lösungen  $n$  von  $\sigma(n) = 2n$ ) bekannt. Das Ergebnis lässt sich auf die Verkettung  $f = f_1 \circ \dots \circ f_k$  von Funktionen  $f_1, \dots, f_k \in \mathcal{K}$  ausdehnen.